Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt \ , \ n \in IN^* \end{cases}$

pour tout n ∈ IN* on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos t\, dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout n≥2 on a :

$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$.

$\forall\ n \geq 2$

$$I_n = n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos(t)\,dt$$

on pose

$u(t) = t^{n-1} \longrightarrow u'(t) = (n-1)t^{n-2}$

$v'(t) = \cos(t) \longrightarrow v(t) = \sin(t)$

$$I_n = n.\left(\left[t^{n-1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-2}\sin(t)\,dt\right)$$

$$= n.\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - (n-1)\,I_{n-2}\right)$$

$$= n\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\,I_{n-2}\right)$$

$$\boxed{I_n = n.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n.(n-1)\,I_{n-2}}$$

$\forall\ n \geq 2$.